

Construction du milieu d'un segment au compas

$B$  milieu de  $[AC]$

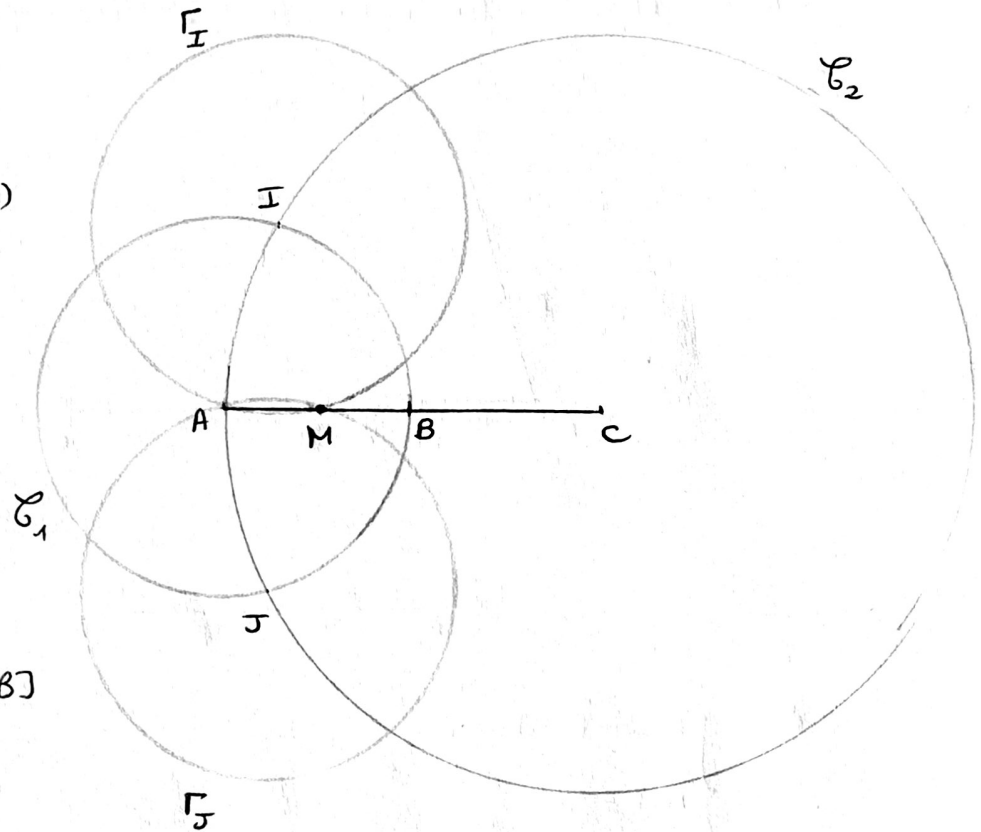
Le cercle  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A, AB)$

coupe le cercle  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(C, CA)$   
en 2 points  $I$  et  $J$ .

Construire les cercles  $\Gamma_I$   
et  $\Gamma_J$  de centres  $I$  et  $J$   
et passant par  $A$ .

$\Gamma_I$  et  $\Gamma_J$  se coupent  
en  $A$  et  $M$ .

Hq  $M$  est le milieu de  $[AB]$



Application : Construire, au compas seul, le milieu d'un segment donné.

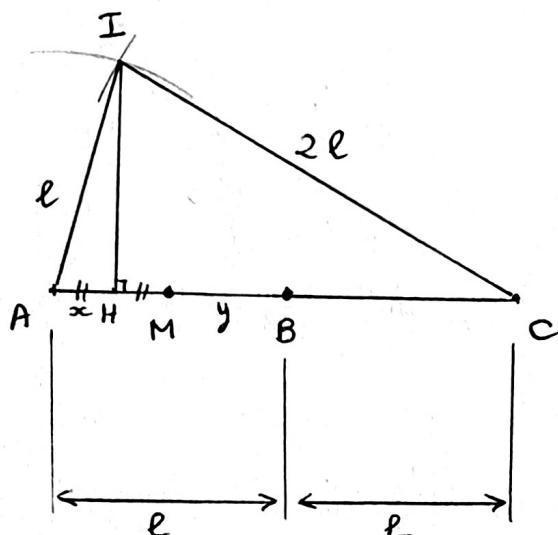
\*  $IAJM$  est un losange : en effet,  $AI = AJ$  car  $I, J \in \mathcal{C}_1$ ,  $IA = IM$  car  $M \in \Gamma_I$  et  $JM = JA$  car  $M \in \Gamma_J$ . Ainsi,  $(AM)$  sera la médiatrice de  $[IJ]$ .

\* On montre facilement que  $I$  et  $J$  sont symétriques  $\perp_a (AB)$ . Vu ce qui précède, on aura nécessairement

$$(AM) \perp (AB)$$

ie  $A, B, M$  alignés.

\* Notons  $h$  la hauteur issue de  $I$  du triangle  $IAC$ .



$$\text{Pours } \begin{cases} AI = l \text{ donné} \\ AH = x \\ MB = y \end{cases}$$

$$\text{On a } \begin{cases} 2x + y + l = 2l \\ IH^2 = l^2 - x^2 = (2l)^2 - (x + y + l)^2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} y = l - 2x & (1) \\ 2l^2 - y^2 - 2xy - 2xl - 2yl = 0 & (2) \end{cases}$$

En substituant  $y$  en fonction de  $x$  de (1) dans (2) :

$$4lx = l^2$$

$$x = \frac{l}{4}$$

donc M milieu de [AB]. CQFD

Le cercle et l'équerre

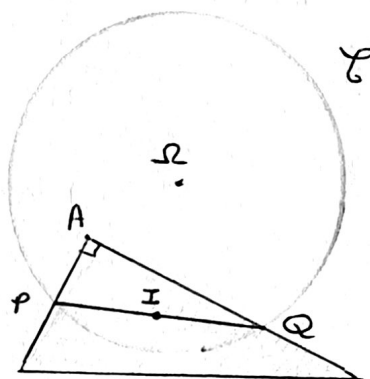
Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et le pt  $A$  sont fixes. On fait tourner une équerre autour du point  $A$  et on note  $P$  et  $Q$  les points d'intersection des bords de l'équerre avec le cercle  $\mathcal{C}$ .

Quel est le lieu géométrique du milieu  $I$  de  $[PQ]$  ?

Ind : une ligne de niveau de

$$M \mapsto MA^2 + M\Omega^2$$

est impliquée ...



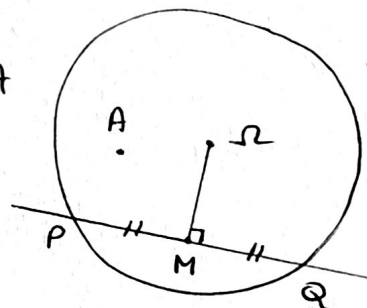
$\mathcal{L}$  = ensemble cherché.

\* Si  $M \in \mathcal{L}$ ,  $MA^2 + M\Omega^2 = MP^2 + M\Omega^2 = R^2$  (Th. médiane dans  $APQ$ )

\* Réc., si  $MA^2 + M\Omega^2 = R^2$ , la perpendiculaire à  $(M\Omega)$  en  $M$  coupe  $\mathcal{C}$  en  $P$  et  $Q$ .

$$\begin{cases} MA^2 = R^2 - M\Omega^2 = PM^2 \\ M \text{ milieu de } [PQ] \end{cases} \Rightarrow PAQ \text{ rectangle en } A$$

$$\Rightarrow M \in \mathcal{L}.$$



• ex. d'entraînement - Mettre l'accent sur la réciproque qui passera souvent inaperçue

Donc :  $\mathcal{S} = \{ M \mid MA^2 + M\Omega^2 = R^2 \}$

Soit  $G$  le barycentre de  $A(1), \Omega(1)$ . C'est le milieu de  $[A\Omega]$ .

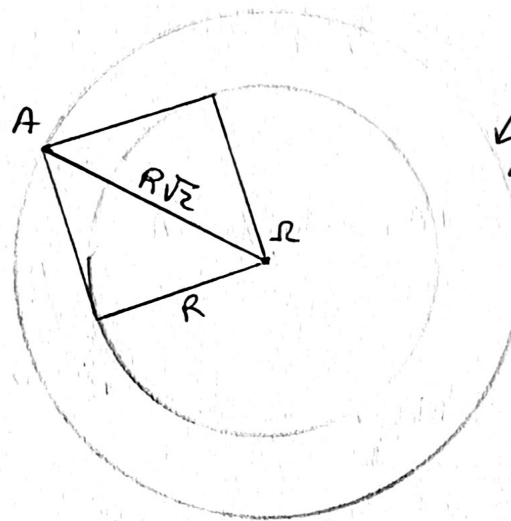
$$MA^2 + M\Omega^2 = R^2 \Leftrightarrow 2MG^2 + GA^2 + G\Omega^2 = R^2$$

$$MG^2 = \frac{1}{2} \left( R^2 - 2GA^2 \right)$$

$$MG^2 = \frac{1}{2} \left( R^2 - \frac{\Omega A^2}{2} \right)$$

NB :  $\mathcal{S}$  est le cercle de centre  $G$  milieu de  $[A\Omega]$  et de rayon  $\sqrt{\frac{1}{2} \left( R^2 - \frac{\Omega A^2}{2} \right)}$  lorsque  $R^2 \geq \frac{\Omega A^2}{2}$ , i.e.  $\boxed{R\sqrt{2} \geq \Omega A}$ .  $G$  le construit facilement en cherchant 1 seul pt  $I \in \mathcal{S}$  : c'est le cercle  $\mathcal{C}(G, GI)$ .

La condition  $\Omega A \leq R\sqrt{2}$  d'existence de solution peut se "lire" géométriquement ainsi :



$\swarrow$  A à l'intérieur de ce cercle : 1 cercle solution  $\mathcal{S}$   
 $\swarrow$  A sur ce cercle :  $\mathcal{S} = \{ G \}$ ,  $G$  milieu de  $[A\Omega]$   
 $\swarrow$  A à l'extérieur de ce cercle, et  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

• Réfléchir au sens de la condition d'existence de solution  $\Omega A \leq R\sqrt{2}$

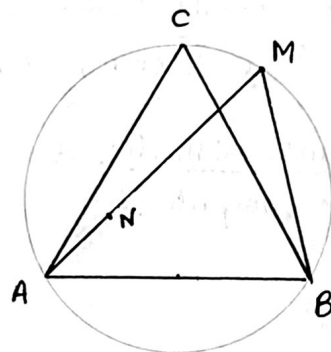
- ① ex: Soit un triangle équilatéral  $ABC$  inscrit dans un cercle  $\Gamma$ .  $\gamma$  est l'arc  $\widehat{BC}$  de  $\Gamma$  ne contenant pas  $A$ .

$M$  étant un pt de  $\gamma$  distinct de  $B$  et de  $C$ , placer le pt  $N$  de la demi-droite  $[MA)$  tel que  $MN = MB$ . Prouver que  $N \in [MA]$ . On oriente le plan de façon que  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$  [27]. Soit  $r$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Quelles sont les images de  $C$  et  $M$  par  $r$ ?

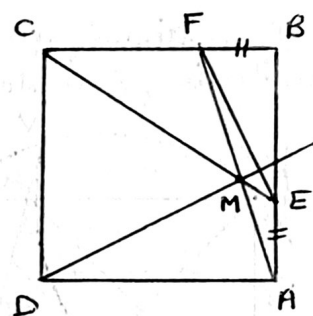
En déduire que pour tout  $M$  de  $\gamma$ :  $MA = MB + MC$

(Sol: AG 18 Capes int. 92, 2-comp.)



- ② Term.: La figure ci-contre représente un carré  $ABCD$ .  $(AF)$  et  $(EC)$  se coupent en  $M$ .

Montrer que  $(DM) \perp (EF)$



Sol.: Il suffit de montrer que  $M$  est l'orthocentre de  $DEF$ . Cela revient à prouver que  $(AF)$  et  $(EC)$  sont des hauteurs du triangle  $DEF$ .

Vérifions que  $(DE) \perp (AF)$ : le quart de tour  $r$  de centre le centre  $O$  du carré et transformant  $A$  en  $B$  va transformer  $D$  en  $A$ , et  $E$  en  $F$  (en effet si  $r(E) = E'$ ,  $E$  étant sur la perpendiculaire à  $(AD)$  passant par  $A$ ,  $E'$  sera sur la perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $B$ . De plus  $E \in [AD] \Rightarrow E' \in [BC]$  et  $E'B = EA = FB$  assureront  $E' = F$ ). L'image de la dte  $(DE)$  par le quart de tour  $r$  sera

donc  $(AF)$ . CQFD

(réf. Tenacher 92 I p139)

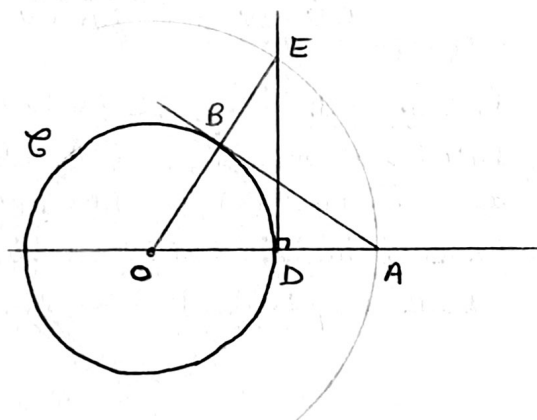
- ③ Construction de la tgte à un cercle, d'après Euclide (3<sup>o</sup> av Jc) (niveau 3<sup>ème</sup>)

(réf. Hocquenghem 80 p149)

Dans son livre III "Éléments", prop. 17, Euclide explique ce tracé de la tangente à  $\mathcal{C}$  passant par un pt  $A$  extérieur à  $\mathcal{C}$ :

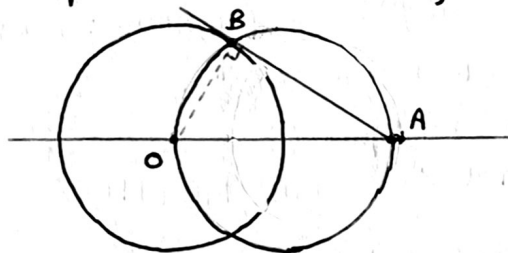
$(OA)$  coupe  $\mathcal{C}$  en  $D$ , et la perp. à  $(OA)$  en  $D$  coupe le cercle  $\mathcal{C}(O, OA)$  en  $E$ .  $(OE)$  coupe  $\mathcal{C}$  en  $B$  et  $(AB)$  sera la tgte cherchée.

Justifier cette construction.



Sol: Par rotation de centre  $O$  amenant  $A$  sur  $E$ ,  $D$  est transformé en  $B$ , et la rotation conservant l'orthogonalité transformera  $(DE)$ , perp. à  $(OD)$ , en  $(AB)$  perpendiculaire à  $(OB)$ . CQFD

Autre méthode: dans la Prop 91 de ses "Données", Euclide donne la méthode plus rapide:



- ④ Triangle équilatéral inscrit dans un carré: Dans le "livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan", le mathématicien arabe Aboul-Wafa (940-997) explique, sans démonstration, la construction d'un triangle équilatéral dans un carré donné (fig.1)

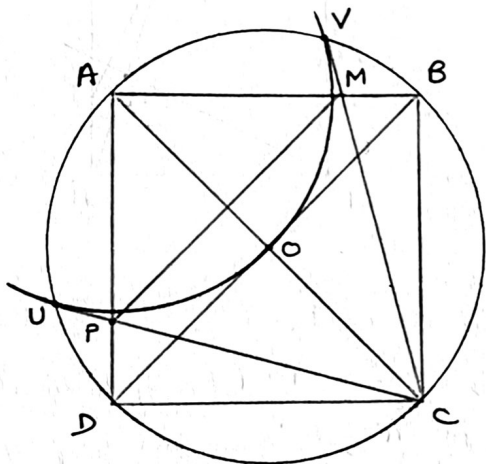


fig.1: MPC est équilatéral

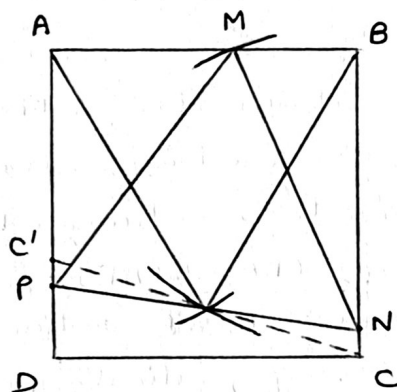


fig.2

Sol:  $\left. \begin{array}{l} (AB) \text{ et } (AD) \text{ sont symm. } \text{à } (AC) \\ (CV) \text{ et } (CU) \text{ " " "} \end{array} \right\} \Rightarrow M \text{ et } P \text{ sont symm. } \text{à } (AC) \Rightarrow CM = CP$

On montre alors que  $\widehat{MCP} = 60^\circ$ . Le triangle OVA est équilatéral, donc

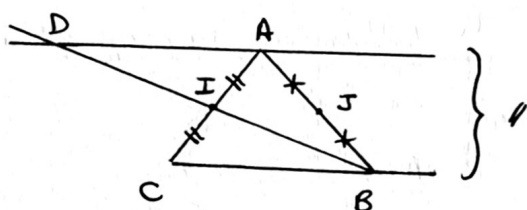
$$\widehat{CU}, \widehat{CV} = 2 \widehat{CA}, \widehat{CV} = \widehat{OA}, \widehat{OV} = 60^\circ. \quad \text{CQFD}$$

Prolongements: la fig. 2 indique comment on obtient tous les triangles équilatéraux MNP inscrits dans le carré ABCD. L'utilisation des symétries a permis de se ramener au cas où  $M \in [AB]$ ,  $N \in [BC]$  et  $P \in [AD]$  seulement désiré ici. La preuve constitue la III<sup>e</sup> partie du CAPES interne 92, 2<sup>e</sup> comp., AG18, qui est entièrement indépendante des précédentes. On y utilise les nbres complexes...

# ⑤ Exercices de 4<sup>ème</sup> utilisant la symétrie centrale

Les ex. suivants font partie d'une recherche didactique sur l'enseignement de la démonstration et l'utilisation du logiciel d'aide à la démonstration D.E.F.I ( "Aide logicielle à la résolution de pb avec preuve ... , de S.A. Almoloud , Recherches en didactique des Math. , Vol 12/2.3 pp271-318, ed. La pensée sauvage , 1992 ) (BIUFM)

⑤.1

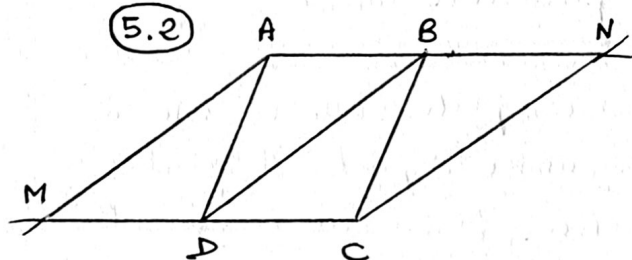


Mq ABCD est un parall.

Sol. : Le Th ddm entraîne  $(IJ) \parallel (BC)$  , comme  $(AD) \parallel (BC)$  on aura  $(IJ) \parallel (AD)$  et le Th. ddm prouve que I est le milieu de  $[BD]$ . CQFD

Autre Sol. : La sym.  $/_{\tilde{a}} I$  transforme Cen A et  $(BC)$  en la  $\parallel \tilde{a} (BC)$  passant par A , soit  $(AD)$  , ... , donc D est le sym. de B  $/_{\tilde{a}} I$  , ... CQFD

⑤.2



ABCD parall.

La parall.  $\tilde{a} (BD)$  passant par A coupe  $(CD)$  en M

" " " " C "  $(AB)$  en N

Mq BNCD est un parallélogramme

NB : L'article propose de localiser les sous-figures ABDM et BNCD, de prouver qu'il s'agit de parall. , et d'en déduire que  $(BN) \parallel (DM)$  et  $BN = DM$  pour conclure. Il manque qqe chose : BNCD non croisé !

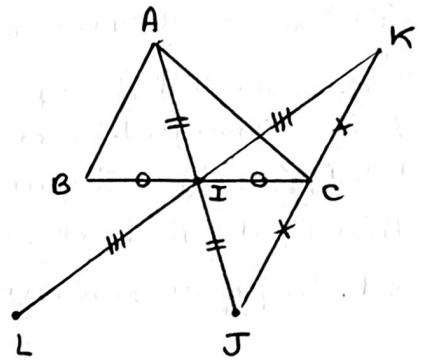
L'article propose une 2<sup>ème</sup> sol. : prouver que ANCM est un parall. , d'où  $AN = CM$  , puis en déduire  $BN = MD$  et terminer comme ci-dessus. On n'a tjrs pas montré que BNCD n'était pas croisé. Je préfère donc :

Sol : On montre que ABDM et BNCD sont des parall. , puis en 3<sup>ème</sup> , on utilise les vecteurs et la relation de Chasles. L'outil est puissant et justifie l'introduction de ces notions. Ici :

$$\vec{BN} = \vec{AB} = \vec{DC} = \vec{MD} \Rightarrow \text{BNCD parallélogramme.}$$

Autre Sol : La symétrie de  $(AM)$   $/_{\text{au}}$  centre O du parall. ABCD sera la dte passant par C et  $\parallel \tilde{a} (AM)$  , ie  $(CN)$ . De m<sup>ême</sup> , la sym. de  $(CM)$  est  $(AN)$ . On déduit que le sym. de M  $/_{\tilde{a}} O$  est N , ... CQFD

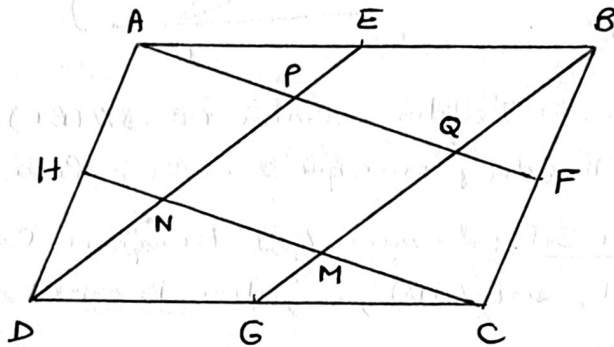
- 5.3 On construit pas mal de symétries pour obtenir la figure :  
 Mq B est le milieu de  $[AL]$



Sol: Mq  $AC \perp BJ$  et  $BL \perp CK$  sont des parall.,...

Autre Sol.: La sym.  $\sigma_I$  transforme le milieu C du segment  $[KJ]$  en le milieu B du segment image  $[AL]$ .

- 5.4 E, F, G, H sont les milieux des côtés du parall. ABCD (fig. ci-contre)  
 Les dtes  $(AF)$ ,  $(CH)$ ,  $(DE)$ ,  $(BG)$  se coupent comme indiqué sur la figure. Mq PQMN est un parallélogramme.



La preuve donnée dans l'article est incomplète : elle consiste à montrer que BEDG est un parallélogramme à partir des seuls renseignements  $(EB) \parallel (DG)$  et  $EB = DG$ . Il manque toujours la condition "BEDG n'est pas croisé" pour conclure. En recommençant avec AFCH, on constate finalement que les côtés opposés de MNPQ sont  $\parallel$  2 à 2 ...

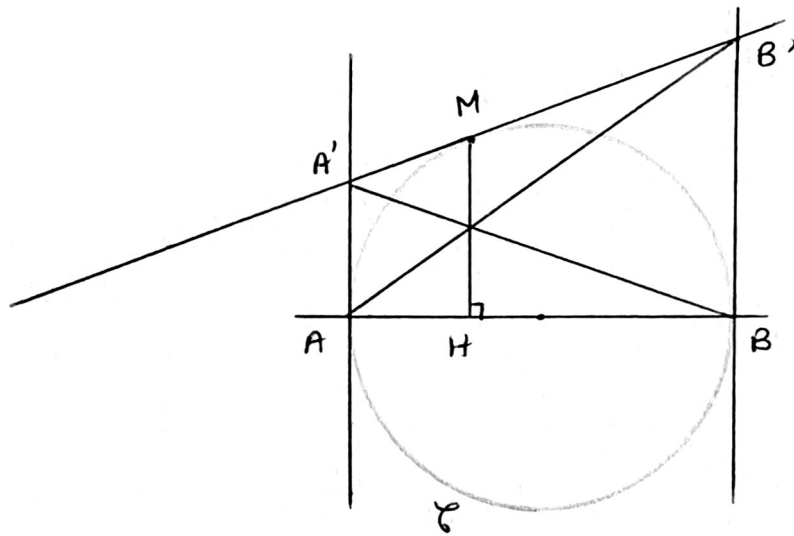
Pour faire fonctionner cette preuve incomplète, il s'avère utile de intervenir la symétrie  $s$  par rapport au centre O du parall. ABCD :

Sol:  $s$  conserve les milieux, donc transformera le milieu E de  $[AB]$  en le milieu G de  $[CD]$ . Comme  $s(D) = B$ , on constate que  $(BG)$  sera la symétrique de  $(DE)$   $\sigma_O$ . D'où  $(BG) \parallel (DE)$ .

De m, on prouverait que  $(AF) \parallel (HC)$ , ...  $CQ \parallel FQ$

NB: ABCD et MNPQ ont m centre de symétrie.

Prolongements: dessiner un parall. dans le parall. MNPQ en procédant de la m manière, et ainsi de suite... Recommencer avec ABCD rectangle, ou losange ...



$[AB]$  est un diamètre du cercle  $\mathcal{C}$ , les tangentes à  $\mathcal{C}$  en  $A$  et  $B$  coupent resp. la droite  $\overline{AM}$  en  $A'$  et  $B'$ .  $H$  désigne la proj. orth. de  $M$  sur  $(AB)$ .  
Mq les dtes  $(A'B)$ ,  $(AB')$ ,  $(MH)$  sont concourantes.

Solution analytique : Repère orthonormal tq  $O\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ,  $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  et  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$ .

Soit  $I$  le milieu de  $[MH]$  et  $M\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ .

$$I\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ \frac{y_0}{2} \end{smallmatrix}\right)$$

$$(A'B') : x_0 x + y_0 y = 1$$

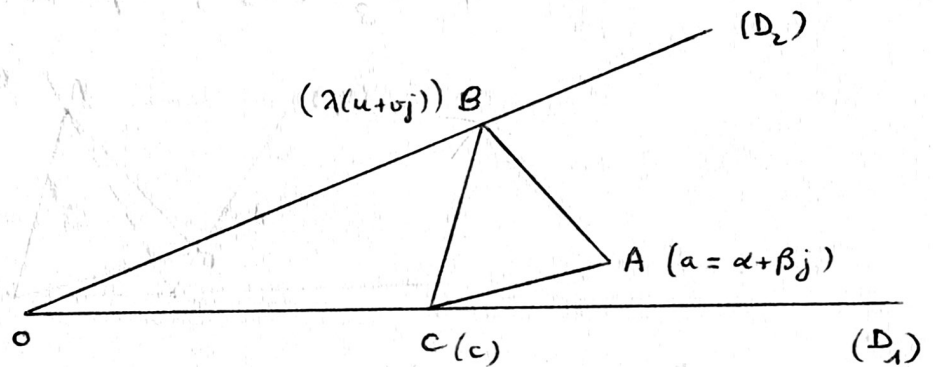
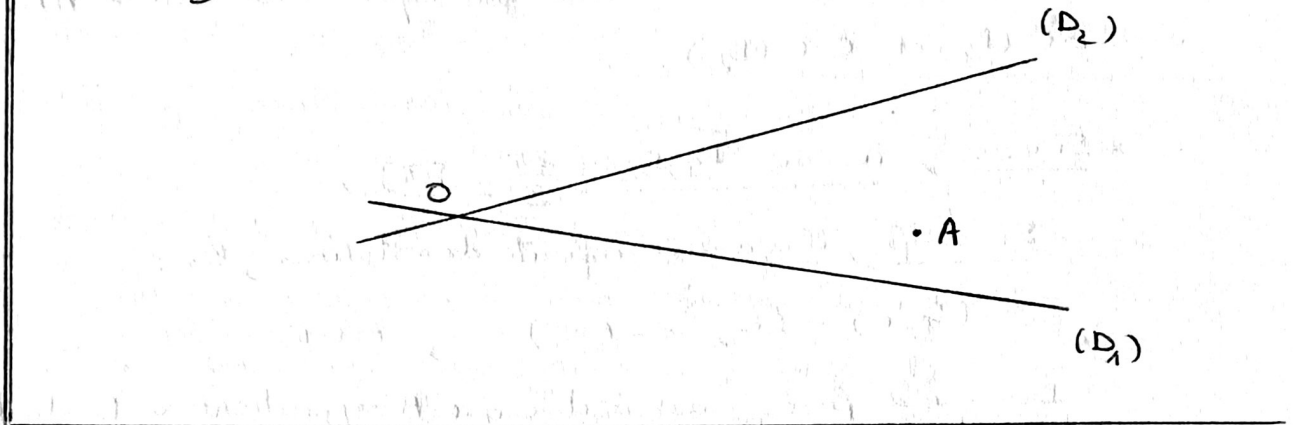
$$A'\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1+x_0 \end{smallmatrix}\right) \quad B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \quad I\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ \frac{y_0}{2} \end{smallmatrix}\right) \quad \text{sont alignés (dét. = 0)}$$

donc  $I \in (A'B)$ .

On vérifie de m. que  $I \in (AB')$ . (...)

On se donne 2 droites sécantes en  $O$  et un point  $A$ .

Trouver  $B$  et  $C$  sur chacune de ces 2 droites et tels que le triangle  $ABC$  soit équilatéral.



On note  $a, b, c$  les affixes de  $A, B, C$  dans repère orthonormal direct d'origine  $O$ .

$ABC$  est un triangle équilatéral direct si  $b - c = -j^2(a - c)$

Notons :  $\begin{cases} b = \lambda b_0, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } b_0 = u + vj & (u, v \in \mathbb{R} \text{ donnés}) \\ c \in \mathbb{R} \\ a = \alpha + \beta j; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

$ABC$  est un triangle équilatéral direct solution si :

$$\lambda(u + vj) - c = -j^2(\alpha + \beta j - c)$$

$$\lambda u - c + \lambda vj = \alpha - c - \beta + j(\alpha - c)$$

$$\begin{cases} \lambda u = \alpha - \beta \\ \lambda v = \alpha - c \end{cases} \quad (*)$$

d'où la discussion :

2

\* Si  $u \neq 0$ , le système (\*) est de Cramer et admettra une unique couple solution. C'est  $(\lambda, c) = \left( \frac{\alpha - \beta}{u}, \alpha - \frac{\alpha - \beta}{u} \cdot v \right)$

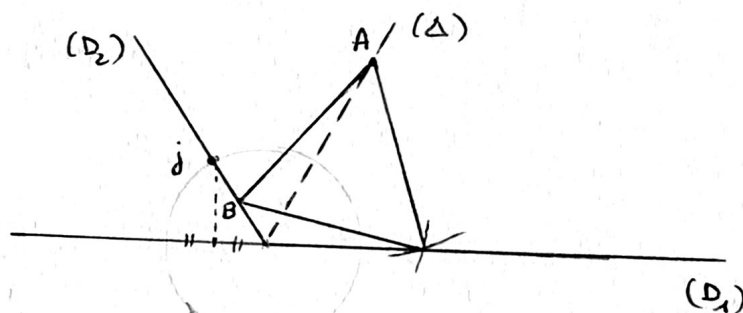
Dans ce cas, il existe 1 et 1 seul triangle équilatéral direct ABC avec  $B \in (D_1)$  et  $C \in (D_2)$ .

\* Si  $u = 0$ , ie si  $\widehat{D_1, D_2} \equiv \frac{2\pi}{3} [\pi]$ ,

• Si  $\alpha = \beta$ , il y a une infinité de solutions, les :

$$(\lambda, c) = (t, \alpha - tv), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dire que  $\alpha = \beta$  équivaut à dire que A appartient à la droite  $(\Delta)$  définie par  $\widehat{D_1, \Delta} \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$ , et passant par O.



Dans ce cas, à chaque point B de  $(D_2)$  on peut associer un et 1 seul pt C de  $(D_1)$  tel que ABC soit un tri. équil. direct (fig. ci-dessus)

• Si  $\alpha \neq \beta$ , ie si  $A \notin (\Delta)$ , il n'y a pas de solution.

Recherche des triangles ABC équilatéraux indirects :

On recommence les calculs ci-dessus pour chercher, cette fois-ci, les triangles équilatéraux indirects ABC solutions du problème.

On trouve, de même :

\* Si  $\widehat{D_1, D_2} \neq \frac{2\pi}{3} [\pi]$ , 1 seule solution indirecte

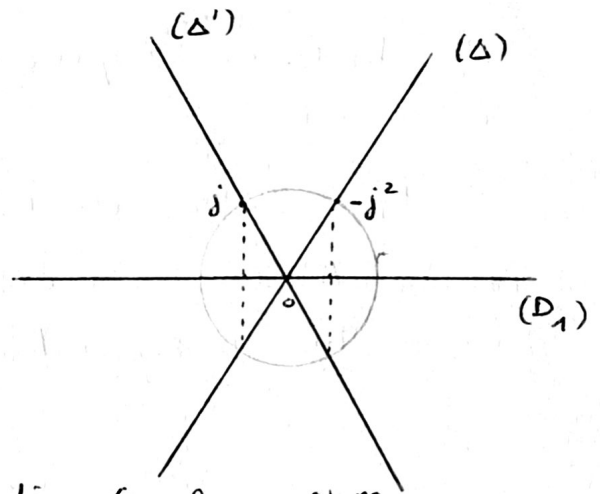
\* Si  $\widehat{D_1, D_2} \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$ ,

• Si  $A \in (\Delta')$  où  $\widehat{D_1, \Delta'} \equiv \frac{2\pi}{3}$  et  $O \in \Delta'$ , une infinité de solutions indirectes

• Si  $A \notin (\Delta')$ , pas de solution indirectes

Ccl :

\* Si  $(D_2) \neq (\Delta)$  et  $(D_2) \neq (\Delta')$ , il existe 1 triangle équil. direct et 1 triangle équil. indirect solution.



\* Si  $(D_2) = (\Delta)$ , il y a :

- 1 seul triangle équil. direct solution (quel que soit A)
- Aucun triangle indirect solution si  $A \notin (\Delta')$   
Une infinité de triangles indirects solution si  $A \in (\Delta')$

\* Si  $(D_2) = (\Delta')$ , il y a :

- Aucun triangle direct solution si  $A \notin (\Delta)$   
Une infinité de triangles directs solution si  $A \in (\Delta)$
- 1 seul triangle indirect solution.

Objectifs :

- Utiliser la caractérisation des triangles équilatéraux directs (resp. indirects) nécessitant l'emploi des complexes
- Faire un raisonnement algébrique dans  $\mathbb{C}$  pour montrer des résultats géométriques

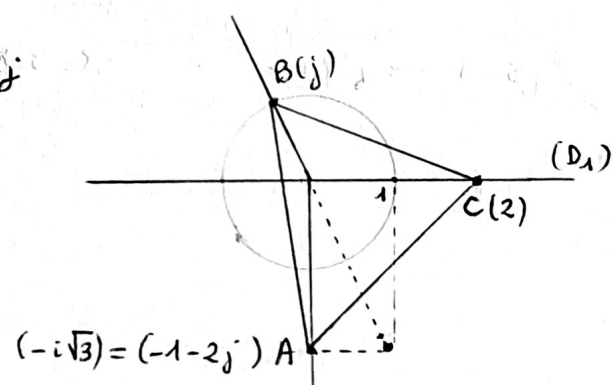
Prolongements :

a) Faire dessiner certains triangles solution.

Ainsi, pour  $u + vj = j$  et  $\alpha + \beta j = -1 - 2j$

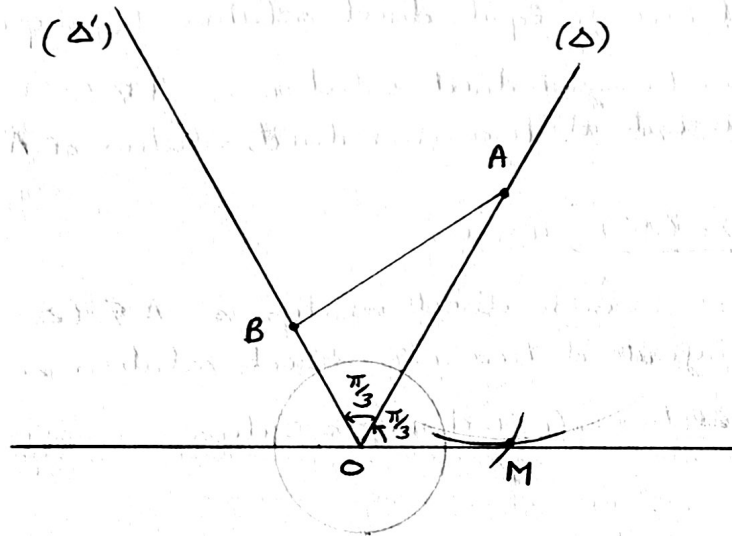
trouve-t-on :  $\lambda = 1$  et  $c = 2$

D'où le dessin :



b) Faire remarquer que l'on a obtenu le résultat intéressant :

Si  $\widehat{D_1, \Delta} = \frac{\pi}{3} [\pi)$  et  $\widehat{D_1, \Delta'} = \frac{2\pi}{3} [\pi)$  dans la figure ci-dessous, pour tout  $A \in (\Delta)$  et  $B \in (\Delta')$ , l'unique point  $M$  tel que  $ABM$  soit un triangle équilatéral direct, appartient à  $(D_1)$ .

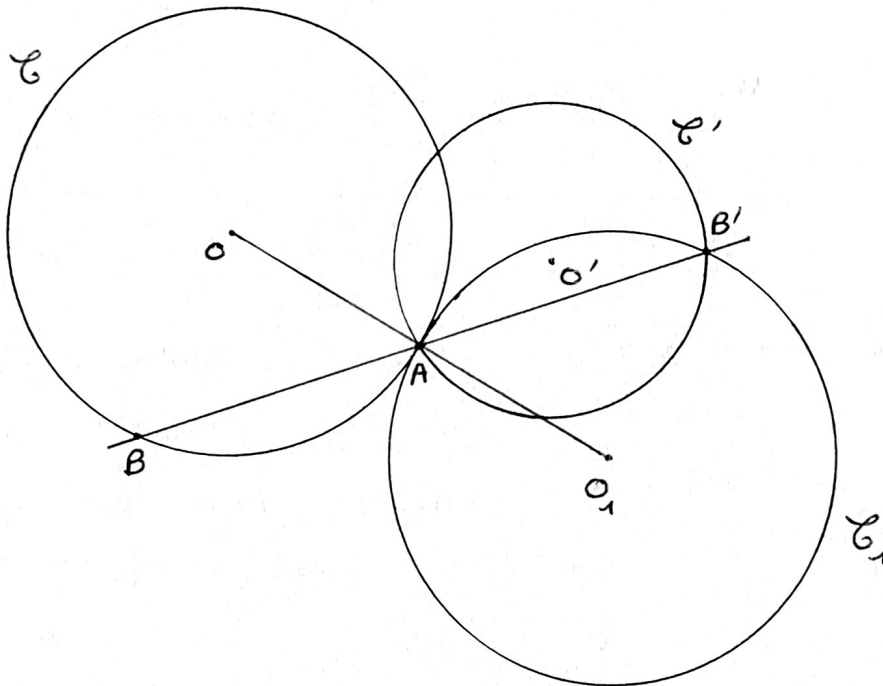


Problème de construction

On se donne 2 cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  et l'on appelle  $A$  l'un des points d'intersection de ces 2 cercles. Trouver  $B \in \mathcal{C}$  et  $B' \in \mathcal{C}'$  tels que  $A$  soit le milieu de  $[BB']$ . Que se passe-t-il si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents

Remarque : dans la résolution d'un problème géométrique, il y a

- 3 étapes :
- 1) Étude de la figure
  - 2) Construction
  - 3) Discussion



\* Si  $B$  et  $B'$  sont solutions,  $B' = s_A(B)$  donc  $B' \in \mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C})$ .

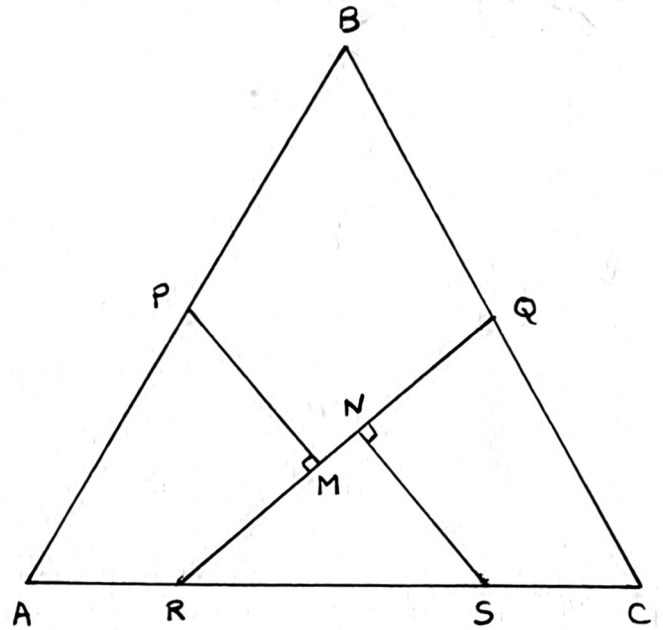
Réciproquement, les points  $B'$  de  $\mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C})$  répondent à la question.

\* Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents :

- Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  n'ont pas le même rayon,  $\mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C}) = \{A\}$  et seul  $B = B' = A$  est solution.
- Si les rayons de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont égaux,  $\mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$  et tous les points  $B'$  de  $\mathcal{C}'$  donnent une solution.

# Infirmen une conjecture

1) Construire un tri. équil.  $ABC$  de 16 cm de côté et placer les milieux  $P$  et  $Q$  de  $[AB]$  et  $[BC]$ . Tracer  $R$  et  $S$  sur  $[AC]$  tels que  $AR = CS = 4$  cm. Tracer  $[RQ]$ .  $M$  et  $N$  désignent les projetés orthogonaux de  $P$  et  $S$  sur  $(RQ)$ . Tracer les segments  $[PM]$  et  $[NS]$ .



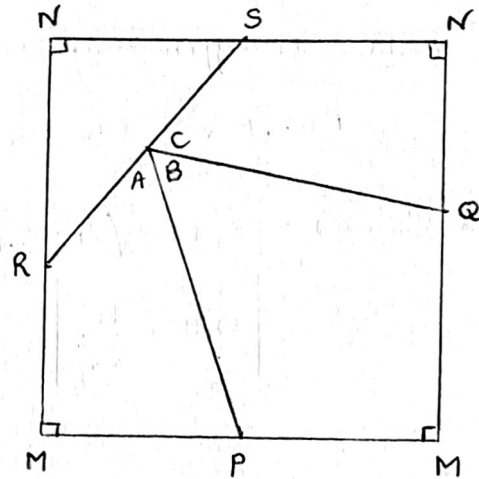
2) Découper suivant les segments obtenus puis vérifier que l'on peut assembler les 4 morceaux pour former un rectangle. Le coller sur la feuille réponse.

3) Est-ce un carré ? Pour le savoir, calculer les dimensions du rectangle en justifiant ...

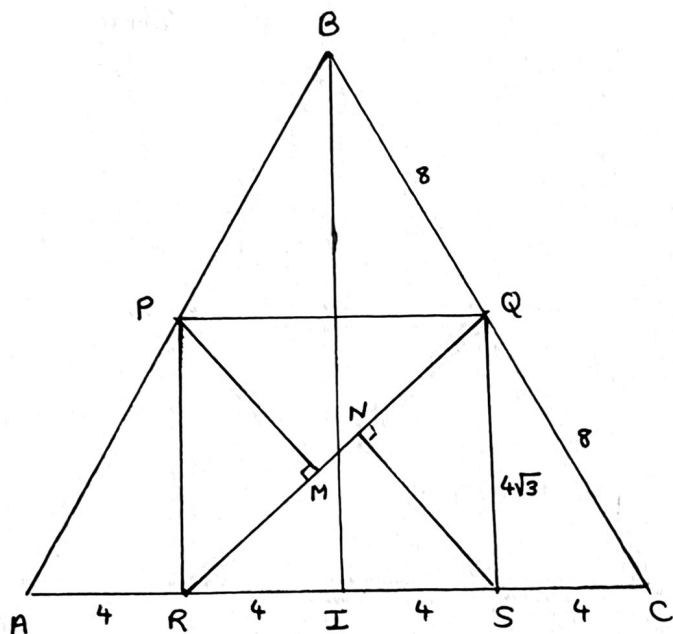
(réf. APMEP n° 382 (fév. mars 92))

2) On obtient, après collage :

C'est un rectangle et pour savoir s'il s'agit d'un carré, il faut, par ex., savoir si  $2 \cdot SN = NQ + QM$ .



Est-ce vraiment un carré ? ...



Question: A-t-on  $2. SN = NQ + QM$  ?

$$BI = 16 \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \quad (\text{hauteur d'un tri. équil.})$$

$(BI) \parallel (QS)$  d'après Thalès, donc  $QS = \frac{BI}{2} = 4\sqrt{3}$   
d'après Thalès dans le triangle.

On localise le rectangle PQSR, d'où :

\* Pythagore :  $QR = \sqrt{QS^2 + RS^2} = \sqrt{16 \cdot 3 + 64} = 4\sqrt{7}$

Dans le tri. rect.  $SQR$  :

$$\underbrace{SR}_{8} \cdot \underbrace{QS}_{4\sqrt{3}} = \underbrace{SN}_{?} \cdot \underbrace{QR}_{4\sqrt{7}} \Rightarrow \boxed{SN = 8\sqrt{\frac{3}{7}}}$$

D'où (Pythagore) :  $NQ = \sqrt{QS^2 - SN^2} = \sqrt{48 - 64 \cdot \frac{3}{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}}$  soit  $\boxed{NQ = \frac{12}{\sqrt{7}}}$

\* Cherchons QM : il suffit de travailler dans le tri. rect.  $PQR$  :

$$PM \cdot RQ = PR \cdot PQ \Rightarrow PM \cdot 4\sqrt{7} = 4\sqrt{3} \cdot 8 \Rightarrow PM = 8\sqrt{\frac{3}{7}}$$

d'où (Pythagore) :  $QM = \sqrt{PQ^2 - PM^2} = \sqrt{64 - 64 \cdot \frac{3}{7}} = \frac{16}{\sqrt{7}}$

$$\boxed{QM = \frac{16}{\sqrt{7}}}$$

Si on obtenait un carré, on aurait  $2. SN = NQ + QM$  soit :

$$2 \times 8\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}} + \frac{16}{\sqrt{7}}$$

$$16\sqrt{3} = 28$$

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4} \quad \text{ce qui est absurde}$$

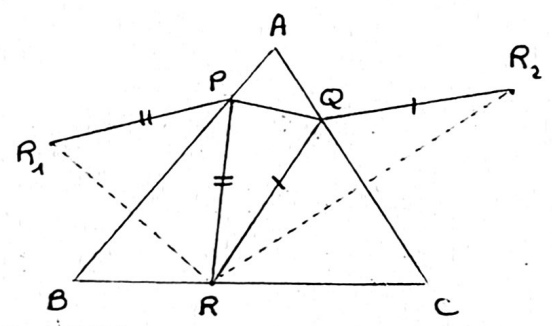
NB : Il s'agit presque d'un carré, car  $\sqrt{3} = 1,732...$  et  $\frac{7}{4} = 1,75$  (!)

TRIANGLE DE PERIMETRE MINIMUM INSCRIT DANS UN TRIANGLE

But : Construire un triangle PQR de périmètre minimum inscrit dans un triangle acutangle ABC.

Utilisons les symétriques  $R_1$  et  $R_2$  de  $R$  / $\hat{a}$  (AB) et  $\hat{a}$  (AC) dans la figure ci-contre, et posons :

$$\beta(P, Q, R) = RP + PQ + QR \quad \text{et} \quad g(R) = R_1R_2$$



a) Montrer que :

$$\forall P \in [AB] \quad \forall Q \in [AC] \quad \forall R \in [BC] \quad \beta(P, Q, R) \geq g(R)$$

puis que  $g(R)$  atteint son minimum en un seul point du segment  $[BC]$ .

b) Notons I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C du triangle ABC.

On admet ( $\square$  Triangle) que "les hauteurs du triangle ABC coïncident avec les bissectrices des angles du triangle orthique IJK".

Montrer que si  $I_1$  (resp.  $I_2$ ) est le symétrique de I / $\hat{a}$  (AB) (resp. (AC)), alors  $I_1, I_2, J$  et  $K$  sont alignés.

c) Conclure.

a) Comme  $\beta(P, Q, R) = R_1P + PQ + QR_2$ , on obtient  $\beta(P, Q, R) \geq R_1R_2 = g(R)$  par l'inégalité triangulaire. Cherchons quand  $g(R)$  est minimum :

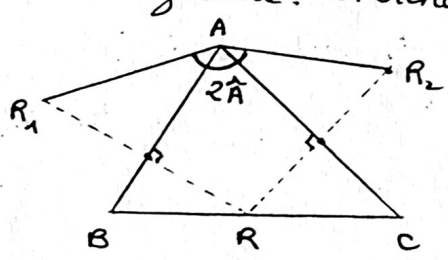


Fig. 1

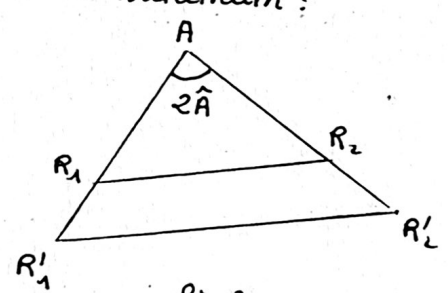


Fig. 2

$\widehat{R_1AR_2} = 2\hat{A}$  est constant, si bien que pour 2 choix différents R et R' de R sur  $[BC]$ , en notant  $R'_1$  (resp.  $R'_2$ ) le symétrique de R' / $\hat{a}$  (AB) (resp. (AC)), on obtienne la fig. 2 pour une rotation de centre A convenable.  $g(R) = R_1R_2$  sera alors minimale dès que  $AR_1 = AR$  l'est, ie dès que R est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

2<sup>e</sup> solution par prolongement : La formule d'Al Kashi dans la fig. 1 donne

$$R_1 R_2^2 = AR_1^2 + AR_2^2 - 2 AR_1 \cdot AR_2 \cos 2\hat{A} = 2AR^2(1 - \cos 2\hat{A}) = 4AR^2 \sin^2 \hat{A}$$

donc  $g(R) \doteq R_1 R_2 = 2 \cdot AR \cdot \sin \hat{A}$ .

$g(R)$  sera donc minimum quand  $AR$  l'est, ie quand  $R = I = \text{piéd. hauteur}$ .

b) Mq  $I_1, J, K$  sont alignés :

$$\widehat{KI_1I} = \widehat{I_1IK} \doteq \alpha$$

$$\widehat{I_1IK} = \widehat{IKC} \text{ car } (II_1) \parallel (KC)$$

(puisque perpendiculaires à  $(AB)$ ).

Comme  $(KC)$  est bissectrice de  $\widehat{IKJ}$

(cf [T] Triangle "Bissectrices du tri. orthique"), on déduit :  $\widehat{CKJ} = \alpha$ .

Ainsi  $\widehat{II_1K} = \widehat{CKJ} = \alpha$ , donc  $(I_1K) \parallel (KJ)$ , donc  $(I_1K) = (KJ)$ .

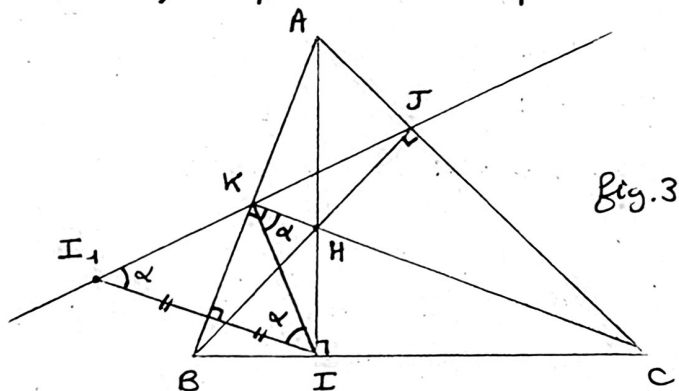


Fig. 3

c) D'après b) :  $\beta(K, J, I) = I_1K + KJ + JJ_1 = I_1J_1 = g(I)$

D'après a) :  $\forall (P, Q, R) \in [AB] \times [AC] \times [BC] \quad \beta(P, Q, R) \geq g(R) \geq g(I) \quad (*)$

donc  $\forall P, Q, R \quad \beta(P, Q, R) \geq g(I) = \beta(K, J, I)$

C'est le triangle orthique  $IJK$  qui réalise le périmètre minimum.

NB : •  $IJK$  est le seul triangle solution car si  $I \neq R$  (par ex.), le a) assure  $g(R) > g(I)$  et (\*) entraîne  $\beta(P, Q, R) > \beta(K, J, I)$

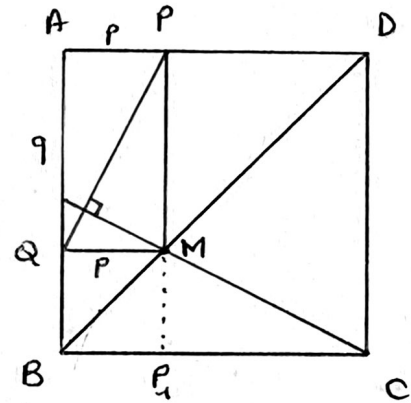
• d'hypothèse  $ABC$  est acutangle assure que les points  $I, J, K$  appartiennent aux segments  $]BC[, ]CA[, ]AB[$ .

• 2<sup>e</sup> solution pour le b) : Soient  $s_{AB}$  (resp.  $s_{KC}$ ) la réflexion d'axe  $(AB)$  (resp.  $(KC)$ ).  $s_{KC} \circ s_{AB}$  est la symétrie  $s_K$  / à  $K$  puisque  $(KC) \perp (AB)$ , et  $s_{KC} \circ s_{AB}(I_1) = J$  (on admet tjrs que  $(KC)$  est la bissectrice de  $\widehat{IKJ}$ ) donc  $K$  sera le milieu de  $[I_1J]$ .

|| Prolongement : Le périmètre du triangle orthique  $IJK$  de  $ABC$  est  $\frac{8S^2}{abc}$  où  $S$  est l'aire du triangle  $ABC$ ,  $a=BC$ ,  $b=AC$  et  $c=AB$ .

preuve : Ce périmètre est  $I_1I_2 = 2 \cdot AI \cdot \sin \hat{A}$  (cf a)), or  $S = \frac{a \times AI}{2}$  et  $S = \frac{AC \cdot BJ}{2} = \frac{AC \cdot AB \sin \hat{A}}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$  donc  $I_1I_2 = 2 \cdot \frac{2S}{a} \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{8 \cdot S^2}{abc}$ . CQFD

M varie sur la diag. BD du carré ABCD, les projetés de M sur [AB] et [AD] sont Q et P. Montrer que  $(CM) \perp (PQ)$



1<sup>ère</sup> solution : La preuve est facilitée par l'introduction d'un repère.

Repère  $\mathcal{R} = (B, \vec{BC}, \vec{BA})$ .

$$C \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad P \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad Q \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{CM} \cdot \vec{PQ} = \begin{pmatrix} t-t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ t-t \end{pmatrix} = 0$$

2<sup>ème</sup> solution : En posant  $AP = p$  et  $AQ = q$ ,

$$\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AQ} = -p\vec{AD} + q\vec{AB} = q\vec{AB} - p\vec{AD}$$

$$\begin{aligned} \vec{CM} &= \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AQ} + \vec{QM} \\ &= -\vec{AD} - \vec{AB} + q\vec{AB} + p\vec{AD} \\ &= (q-1)\vec{AB} + (p-1)\vec{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{PQ} \cdot \vec{CM} &= q(q-1)AB^2 - p(p-1)AD^2 \\ &= (q(q-1) - p(p-1))AB^2 \end{aligned}$$

L'observation du rectangle  $MP_1BQ$  de la figure ci-dessus

mq  $p = 1 - q$ , d'où  $\vec{PQ} \cdot \vec{CM} = 0$